LA LUTTE POUR LES INEGALITES...

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Institut de mathématiques
Université PAUL SABATIER
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 9, France

RÉSUMÉ. *Dans un espace vectoriel normé, éventuellement dans un espace préhilbertien, nous revisitons des inégalités s'apparentant à l'inégalité triangulaire habituelle.*
MOTS-CLÉS. *Espace vectoriel normé, inégalité triangulaire, espace préhilbertien, inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ.

"Mais c'est sans doute de la lutte **contre** *les inégalités qu'il veut parler ?"*...Non, non il s'agit bien d'avoir et de maintenir des inégalités...mais elles sont mathématiques. Chacun sait le rôle que jouent les inégalités en mathématiques, celles qui ont une portée générale bien sûr. Leur histoire est longue, bien racontée dans [1], des ouvrages entiers leur sont consacrés, trois revues même en ont fait leur thème principal ([2,3,4]). L'ouvrage [5] autour de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est rapidement devenu un best-seller. Ne dit-on pas que chaque mathématicien a son inégalité favorite ? De fait, qui d'entre nous n'a pas rêvé de laisser son nom à une inégalité, héritage aussi prestigieux qu'un théorème ou lemme ? La note que voici concerne des inégalités sur les normes dans un espace vectoriel normé, éventuellement dérivées de produits scalaires dans un espace préhilbertien ; elles ne semblent pas (toutes) très connues, nous les présentons avec des démonstrations complètes.

1. L'inégalité de MASSERA-SCHÄFFER (1958)

Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel (réel) normé. L'inégalité la plus connue sur la norme $\|.\|$ est ladite *inégalité triangulaire,* $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, qui fait partie des axiomes de définition d'une norme. Plutôt que de majorer $\|x-y\|$, nous allons considérer les vecteurs unitaires dirigeant $x \neq 0$ et $y \neq 0$, et essayer de majorer le plus finement possible

$$\alpha(x,y) := \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Cet écart $\alpha(x,y)$ est parfois appelé *distance angulaire* (ou distance de CLARKSON) entre x et y.

Théorème de MASSERA-SCHÄFFER **[6].**
Pour tous x et y non nuls de l'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\max(\|x\|, \|y\|)} \|x-y\|. \tag{1}$$

Démonstration. Comme $\alpha(x,y) = \alpha(y,x)$, il suffit de considérer le cas où $\|y\| \leqslant \|x\|$. Nous utilisons la notation allégée α pour $\alpha(x,y)$, lequel α est majoré par 2 (de par l'inégalité triangulaire). Notre objectif est donc de démontrer que

$$\alpha \leqslant \frac{2}{\|x\|} \|x-y\|. \tag{1'}$$

1er cas. Supposons $\|y\| \leqslant (1-\frac{\alpha}{2})\|x\|$. Le résultat découle des enchaînements suivants :

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \leqslant \|x-y\| + (1-\frac{\alpha}{2})\|x\|,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{2}\|x\| \leqslant \|x-y\|,$$

ce qui est exactement (1').

2ème cas. Supposons $(1-\frac{\alpha}{2})\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant \|x\|$. Alors :

$$\begin{aligned}\alpha\|x\| &= \left\|x - \frac{y}{\|y\|}\|x\|\right\| = \left\|x - y - \frac{y}{\|y\|}(\|x\| - \|y\|)\right\| \\ &\leqslant \|x-y\| + (\|x\| - \|y\|) \leqslant \|x-y\| + \frac{\alpha}{2}\|x\|,\end{aligned}$$

d'où à nouveau

$$\frac{\alpha}{2}\|x\| \leqslant \|x-y\|$$

comme dans le 1er cas. □

Commentaire 1. Puisque $\|x\| + \|y\| \leqslant 2\max(\|x\|, \|y\|)$, il vient de (1) l'inégalité plus faible suivante

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \frac{4}{\|x\| + \|y\|}\|x-y\|, \tag{2}$$

qu'on aura l'occasion de commenter plus loin.

Commentaire 2. Il n'est pas possible de faire mieux que la constante 2 dans l'inégalité (1). En effet, supposons qu'on ait une constante $k > 0$ telle que

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \frac{k}{\max(\|x\|, \|y\|)}\|x-y\| \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ non nuls,} \tag{2'}$$

et montrons que $2 \leqslant k$ nécessairement.

Pour x de norme égale à 1 et $y \neq 0$ de norme < 1, l'inégalité (2') dit la chose suivante :

$$\left\|x - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant k\|x-y\|.$$

A présent, choisissons (astucieusement) y de la forme tx avec $0 < t < 1$. L'inégalité au-dessus indique alors

$$2 \leqslant k(1+t).$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre t vers 0 pour obtenir que $2 \leqslant k$.

Commentaire 3. D'après l'inégalité (1), la fonction vecteur-unitaire $x \neq 0 \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ vérifie une condition de LIPSCHITZ sur $\Omega := \{x \text{ tel que } \|x\| \geqslant 1\}$, avec une constante de LIPSCHITZ égale à 2 (au moins). Malheureusement, et contrairement à ce que notre intuition-vision (trop euclidienne) des choses nous sugérerait, on ne peut pas descendre à une meilleure constante de LIPSCHITZ. Considérons par exemple $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme du maximum : $\|x\|_\infty = \max(|u|, |v|)$ pour $x = (u, v)$. Si $x = (1,1)$ et $y = (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ avec $0 < \epsilon < 1$, on note que

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \text{ tandis que } \|x-y\| = \epsilon.$$

2. L'inégalité de DUNKL-WILLIAMS (1964)

Dans ce paragraphe, on se place dans un espace préhilbertien (réel) $(X, \langle ., . \rangle)$ et la norme considérée sera celle déduite du produit scalaire $\langle ., . \rangle$, c'est-à-dire définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. La norme considérée est donc plus particulière que dans le contexte du paragraphe précédent, ce qui nous permettra d'utiliser des règles de calcul spécifiques aux normes dérivées d'un produit scalaire, et obtenir une inégalité plus fine que (1). Alors que l'inégalité de MASSERA-SCHÄFFER est assez connue et fait les délices des interrogateurs ou examinateurs, celle de DUNKL-WILLIAMS qui va suivre nous semble moins connue.

Théorème de DUNKL-WILLIAMS **[7].**
Pour tous x et y non nuls de l'espace préhilbertien $(X, \langle ., . \rangle)$, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\|x\| + \|y\|} \|x - y\| . \tag{3}$$

L'égalité a lieu lorsque $\|x\| = \|y\|$ ou $\frac{x}{\|x\|} = -\frac{y}{\|y\|}$.

Démonstration. Comme on s'y attend, la règle de calcul principale qui va servir est $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$, ainsi que sa version scalaire $(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \|v\|$.

1ère étape. Evaluation de $[\alpha(x, y)]^2$. On a :

$$\begin{aligned} [\alpha(x,y)]^2 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \\ &= \frac{1}{\|x\| \|y\|} \left[2 \|x\| \|y\| - 2\langle x, y \rangle\right] \\ &= \frac{1}{\|x\| \|y\|} \left[\|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2\right] . \end{aligned} \tag{3'}$$

2ème étape. Evaluation explicite du déficit dans l'inégalité (3). On a :

$$\begin{aligned} \Delta \; : &= \|x - y\|^2 - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2}\right)^2 \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2}\right)^2 \frac{1}{\|x\| \|y\|} \left[\|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2\right] \text{ (d'après (3'))} \\ &= \frac{4 \|x - y\|^2 \|x\| \|y\| - (\|x\| + \|y\|)^2 \left[\|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2\right]}{4 \|x\| \|y\|} \\ &= \frac{\|x - y\|^2 \left[4 \|x\| \|y\| - (\|x\| + \|y\|)^2\right] + (\|x\| - \|y\|)^2 (\|x\| + \|y\|)^2}{4 \|x\| \|y\|} . \end{aligned}$$

Or

$$4 \|x\| \|y\| - (\|x\| + \|y\|)^2 = -(\|x\| - \|y\|)^2,$$

et

$$- \|x - y\|^2 + (\|x\| + \|y\|)^2 = 2 \left[\langle x, y \rangle + \|x\| \|y\|\right] .$$

Il s'ensuit :

$$\Delta = \frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{2 \|x\| \|y\|} \left[\langle x, y \rangle + \|x\| \|y\|\right] . \tag{3''}$$

En conséquence, il résulte de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

- $*\Delta \geqslant 0$, c'est-à-dire l'inégalité (3) ;
- $*\Delta = 0$ si et seulement si : $\|x\| = \|y\|$ ou $\dfrac{x}{\|x\|} = -\dfrac{y}{\|y\|}$. $\square$

Commentaire 4. Dans la situation présente, au contraire de ce qui a été évoqué au Commentaire 3, la fonction vecteur-unitaire $x \neq 0 \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ vérifie une condition de LIPSCHITZ sur $\Omega := \{x \text{ tel que } \|x\| \geqslant 1\}$, avec une constante de LIPSCHITZ égale à 1.

Commentaire 5. Une amélioration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant 1 \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ non nuls.} \qquad \text{(CAUCHY-SCHWARZ)}$$

L'inégalité (3) de DUNKL-WILLIAMS va nous permettre d'être un peu plus précis dans cet encadrement. En effet,

$$\begin{aligned} 2 - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \leqslant \frac{4}{(\|x\| + \|y\|)^2} \|x - y\|^2, \\ 2 + 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \leqslant \frac{4}{(\|x\| + \|y\|)^2} \|x + y\|^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$1 - 2\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}\right)^2 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant -1 + 2\left(\frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|}\right)^2. \qquad \text{(C-S amélioré)}$$

Il s'agit bien d'une amélioration de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ puisque :

$$-1 \leqslant 1 - 2\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}\right)^2 \text{ et } -1 + 2\left(\frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|}\right)^2 \leqslant 1.$$

Commentaire 6. Une caractérisation des normes dérivées de produits scalaires.

Il y a de multiples façons de caractériser des normes qui dérivent d'un produit scalaire, un livre entier leur est consacré ([8]) ; la plus célèbre d'entre elles est l'égalité du parallélogramme de P. JORDAN et J. VON NEUMANN (1935) : on doit avoir

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ de } X.$$

Parmi les plus étonnantes est la caractérisation de E.R. LORCH (1948), *cf.* page 30 dans [8] : une norme $\|.\|$ sur X dérive d'un produit scalaire lorsque, pour tous u et v unitaires de X, on a :

$$\|u + v\| \leqslant \left\| t\,u + \frac{1}{t}\,v \right\| \text{ pour tout } t > 0. \tag{4}$$

Avec KIRK et SMILEY ([9]), montrons que *l'inégalité (3) de* DUNKL-WILLIAMS *en fait caractérise une norme dérivant d'un produit scalaire.* En effet, prenons u et v unitaires dans X et $t > 0$; en posant $x = t\,u$ et $y = -\frac{1}{t}\,v$, l'inégalité (3) indique que

$$\|u + v\| \leqslant \frac{2}{t + 1/t} \left\| t\,u + \frac{1}{t}\,v \right\|,$$

ce qui implique (4).

3. Les inégalités de MALIGRANDA (2006)

Revenons au contexte d'un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$. Les inégalités que nous présentons ci-dessous sont les meilleurs raffinements de l'inégalité triangulaire qui soient connus à ce jour ; les améliorations ou variantes qui ont suivi sont "tétrapilectoniques" (*i.e.*, désignant l'art de couper les cheveux en quatre ; néologisme attribué à U. ECO (1932-)).

Théorème de MALIGRANDA **[10].**
Pour tous x et y non nuls de l'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$, on a les inégalités suivante :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| - [2-\alpha(x,-y)] \min(\|x\|, \|y\|) \; ; \tag{5}$$

$$\|x+y\| \geqslant \|x\| + \|y\| - [2-\alpha(x,-y)] \max(\|x\|, \|y\|) \, . \tag{6}$$

Démonstration. Contentons-nous de la démonstration de (5), car celle de (6) est du même tonneau. Supposons $\|x\| \leqslant \|y\|$. Alors, de par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|}x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right) \right\| \\
&\leqslant \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| + \|y\| - \|x\| \\
&= \|x\| + \|y\| + \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| - 2 \right) \|x\| \\
&= \|x\| + \|y\| - [2-\alpha(x,-y)] \, \|x\| \, .
\end{aligned}$$

On opère de la même manière lorsque $\|y\| \leqslant \|x\|$. Sachant que $\alpha(y,-x) = \alpha(x,-y)$, on est bien rendu à l'inégalité (5). □

Commentaire 7. Il vient de (6), en changeant y en $-y$:

$$\|x-y\| - \|x\| - \|y\| + 2\max(\|x\|, \|y\|) \geqslant \alpha(x,y) \max(\|x\|, \|y\|) \, . \tag{6'}$$

Or
$$|\|x\| - \|y\|| = -\|x\| - \|y\| + 2\max(\|x\|, \|y\|) \, .$$

Par suite, (6') implique

$$\alpha(x,y) \leqslant \frac{1}{\max(\|x\|, \|y\|)} \left(|\|x\| - \|y\|| + \|x-y\| \right) , \tag{7}$$

ce qui est une légère amélioration de l'inégalité (1) de MASSERA-SCHÄFFER (*cf.* Paragraphe 1).

Remerciements. Je remercie ALBERTO SEEGER, professeur à l'université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, de m'avoir fait connaître l'inégalité de DUNKL-WILLIAMS, ce qui m'a permis de parcourir quelque peu l'écheveau des inégalités générales dans les espaces vectoriels normés ou préhilbertiens.

Références.

[1] A.M. FINK, *An essay on the history of inequalities.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 249, 118-134 (2000).

[2] *Journal of Inequalities and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, depuis 1997.

[3] *Mathematical Inequalities and Applications (MIA)*, Publishing House element d.o.o., Zagreb, depuis 1998.

[4] *Journal of Inequalities in Pure and Applied mathematics (JIPAM)*, Victoria University, depuis 1999.

[5] J.M. STEELE, *The Cauchy-Schwarz master class ; an introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge University Press, 2004. Réimprimé plusieurs fois.

[6] J.L. MASSERA AND J.J.SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis.* Annals of Mathematics, Vol. 67, N°3, 517-573 (1958).

[7] C.F. DUNKL AND K.S. WILLIAMS, *A simple norm inequality.* The American Mathematical Monthly, Vol. 71, N°1, 53-54 (1964).

[8] D. AMIR, *Characterizations of inner product spaces.* Birkhäuser Verlag, 1986.

[9] W.A. KIRK AND M.F. SMILEY, *Another characterization of inner product spaces*. The American Mathematical Monthly, Vol. 71, N°8, 890-891 (1964).

[10] L. MALIGRANDA, *Simple norm inequalities.* The American Mathematical Monthly, Vol. 113, N°3, 256-260 (2006).